# Réseaux fractals, relation longueur/rayon

Serge Michel Jacques Thibault

# Réseaux fractals, relation longueur/rayon

**Serge Thibault**

*La démonstration qui suit est issue du doctorat d'Etat « Modélisation morpho-fonctionnelle des réseaux d'assainissement urbain à l'aide du concept de dimension fractale » (Serge Thibault, INSA de Lyon Université Claude Bernard - Lyon I (1987-04-02)). Elle correspond aux pages 135-139 de ce doctorat - http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00277119_v1/ (1987-2011).*

La relation $L(R)=aR^D$ (longueur du réseau contenu dans la boule de rayon R centrée à l'origine du réseau (son exutoire), D étant un exposant, caractérise les réseaux de dimension non entière valant D. Cette relation est vraie pour les réseaux construits par homothétie interne. Dès lors que cette relation longueur/rayon sera convenablement vérifiée pour un réseau quelconque nous en déduirons qu'il possède une dimension fractionnaire égale à D.

Le texte qui suit est la démonstration que cette relation est vraie pour les réseaux construits par homothétie, caractérisés par une dimension d'homothétie. Rappelons que le processus de construction d'un tel réseau par homothétie consiste tout d'abord à découper en 1/r parties un segment initial, chaque partie étant égale à 1/r fois la longueur du segment initial (r est le rapport d'homothétie). Puis sur tout ou partie des nœuds non extrêmes (en nombre de $\frac{1}{r} - 1$))on rajoute un à deux segments de longueur 1/r. La nouvelle figure possède alors N segments. Ce processus est caractérisé par une dimension D (dimension d'homothétie)

$$D = \frac{Ln(N)}{Ln\,(\frac{1}{r})}$$

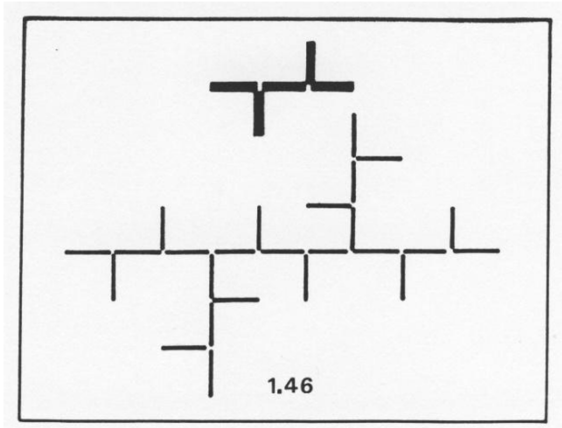
**<u>Définition</u> :** Appartenant à l'intervalle [1,2] pour des réseaux plans, la dimension d'homothétie, n'est pas nécessairement équivalente à la dimension de recouvrement. Elle dépend de l'orientation de la figure, c'est à dire de la position du point aval. Elle n'est pas une mesure d'unicité structurelle, puisqu'une même dimension peut représenter différents types de ramifications. Nous dirons qu'elle est représentative d'une classe de figures (N, r).

## a) <u>Procédure</u>

Après une interpolation, un segment est remplacé par N segments, le segment initial de longueur x étant découpé en 1/r tronçons. Si l est la longueur de ceux-ci, la figure a une longueur totale L qui se détermine comme suit :

$$x = l/r$$
$$L = N * l = r^{-D} * l = (\frac{l}{x})^{-D} * l = l^{1-D} * x^D$$

Considérons maintenant une extrapolation d'une figure initiale de dimension 1.46, explicitée par l'exemple suivant :




La nouvelle figure obtenue après une seule extrapolation est constituée de N figures initiales, le plus long chemin en contenant 1/r. Nous allons calculer les longueurs L de x en x, sachant qu'à la distance x,

$$L(x) = l^{1-D} * x^D$$

Comme la dimension d'homothétie est représentative d'une classe de figures et non pas d'une seule, ce calcul de longueur n'est pas déterministe. En effet, l'interpolation revient à répartir (N - 1/r) segments sur (1/r - 1) points de ramifications possibles avec un certain nombre de contraintes qui découlent des propriétés énoncées précédemment.

Notre propos étant de vérifier une tendance et non pas une situation exacte, nous ferons un calcul moyen de longueur, c'est-à-dire que la répartition des figures sera supposée uniforme.
Ainsi, et après une extrapolation, la forme partielle est constituée de (2 + n) figures extrapolées, à la distance 2.x avec n = (N-1/r)/(1/r-1). En notant R2 la distance 2x, la longueur correspondante du réseau vaut :

$$L(R2) = (2+n) * 2^{-D} * l^{1-D} * R2^D$$

relation qui se généralise comme suit pour j variant de 1 à 1/r,

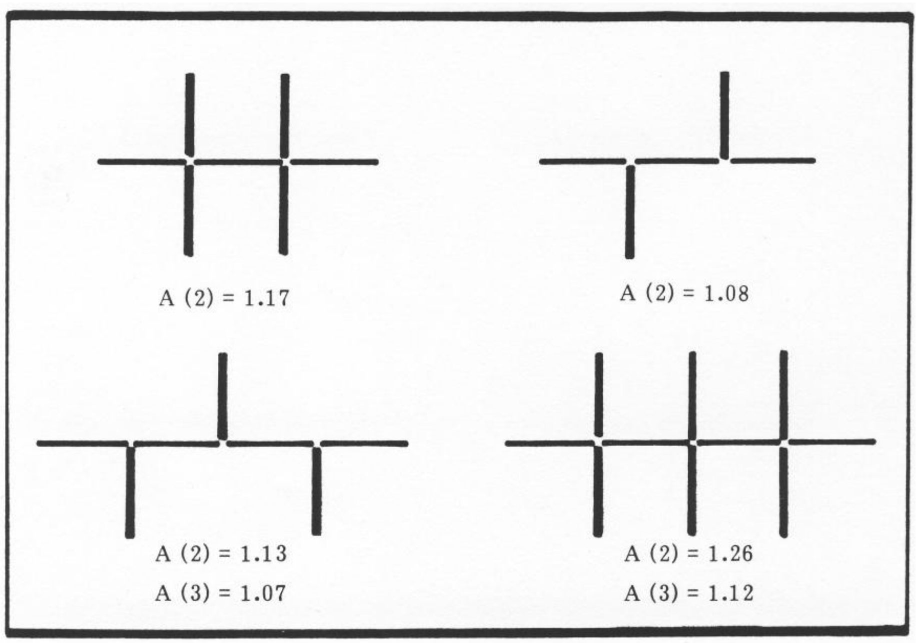
$$L(Rj) = A(j, D) * l^{1-D} * Rj^D$$

Avec

$$Rj = j * x$$
$$A(j, D) = (j + (j-1) * n) * j^{-D}$$

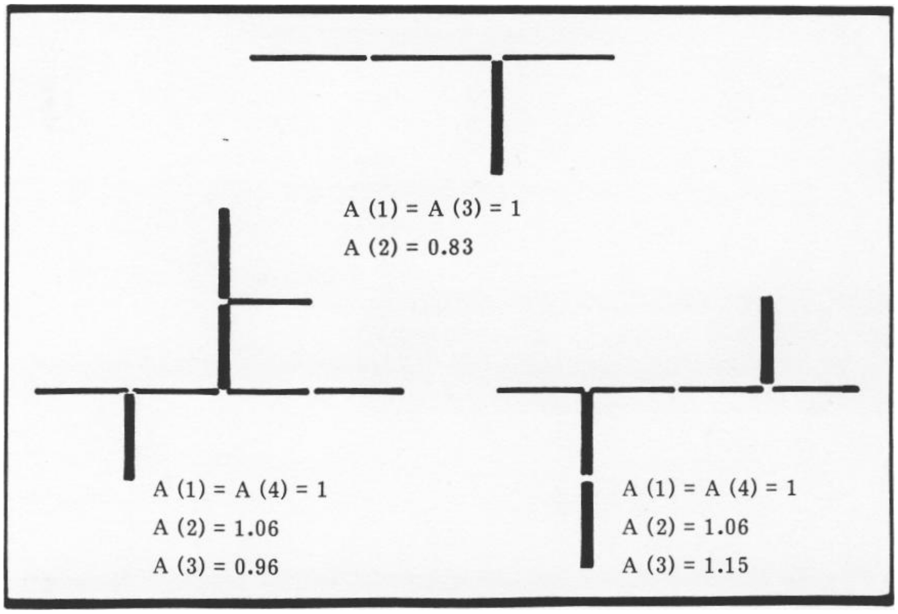
Si la fonction A(j, D) est voisine de 1 lorsque j varie dans le cadre des réseaux construits par homothétie interne, nous pourrons dire que si la variation de la longueur d'un réseau quelconque en fonction du rayon est approximée convenablement par $a * R^D$, l'exposant D représente une évaluation de la dimension fractale du réseau, considérée comme une dimension d'homothétie.

Pour les valeurs extrêmes de J, la fonction A(J,D) vaut strictement l. Pour des figures où la répartition des ramifications est effectivement uniforme, nous avons pu vérifier empiriquement la proximité à 1 de A(J,D). Quelques exemples :




Ceci est d'autant plus vrai que la ramification est une bifurcation. Lorsque la répartition n'est plus uniforme, la fonction A reste également proche de l'unité,

Quelques exemples en prenant égale à un la longueur de la figure servant à l'extrapolation,




**b) <u>Proposition</u>**

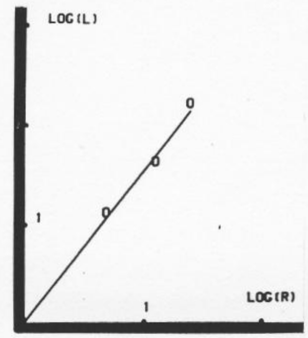
**L'approximation de L(R) par la fonction $a * R^d$ donne une bonne évaluation de la dimension d'homothétie (d≈D), les variations de la fonction A étant en partie représentées par un coefficient a moyen.**

<u>REMARQUE</u> : Cette approximation étant basée sur un décompte des parties de la figure, elle est uniquement reliée à la dimension d'homothétie, différente en règle générale de la dimension de recouvrement (sauf lorsque le principe de composition n'utilise pas l'enchaînement des parties).

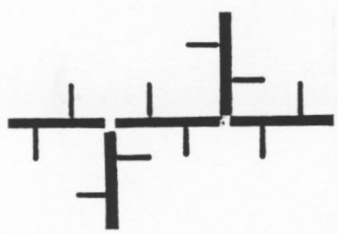
**c) <u>Exemples</u>**

Pour les figures suivantes, à homothétie, nous avons approximé L par la relation $a * R^d$.
Pour chacune d'elles, d est proche de la dimension d'homothétie. Exemples :

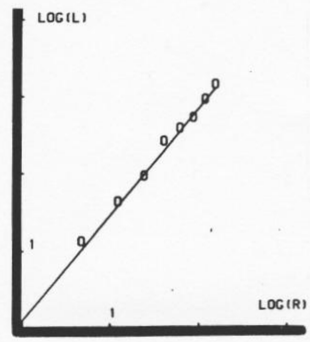
D = 1.585




d = 1.55



D = 1.43




d = 1.40